Propiedades de la Transformada de Laplace

W. Colmenares

Universidad Simón Bolívar, Departamento de Procesos y Sistemas

Resumen

En estos apuntes demostramos algunas de las propiedades de la transformada de Laplace y hacemos algunos ejemplos de su aplicación.

1. Definición de la transformada de Laplace

Uno de los elementos importantes cuando se habla de la Transformada de Laplace es definir claramente de cuál de ellas se está hablando. Las propiedades y, sobre todo, las aplicaciones dependen de ello.

Existen dos tipos de transformadas, la bilateral y la unilateral. Esta última se usa, casi exclusivamente, para el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, en la que es particularmente útil, y es a la que nos referiremos en estas notas.

Otro elemento importante, cuando trabajamos con la transformada unilateral es que, en general, las señales de entrada a los sistemas son señales que son cero para $t < 0$.

La definición de la Transformada de Laplace unilateral es:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int\limits_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

donde $s = \sigma + j\omega$, σ es una constante (que puedo elegir para hacer que la integral de Laplace converja) y ω es la variable de transformación.

Preprint submitted to PS2315 *24 de junio de 2008*

1.1. Algunos ejemplos de transformada

Calculemos la transformada de Laplace de una exponencial que comienza en $t = 0$ ($x(t) = e^{at}u(t)$).

$$\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{(s-a)}.$$

Observe que no hemos colocado ninguna restricción en el valor de a y, en particular, podría asumir valores reales positivos, negativos, valores complejos o ser simplemente cero.

Como corolario, es inmediato que la transformada de Laplace del escalón $u(t)$ es ($a = 0$):

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

Apliquemos ahora el resultado anterior al cálculo de la transformada del coseno que comienza en $t = 0$ ($x(t) = \cos(\omega t)u(t)$)

Recordemos que por la identidad de Euler:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

entonces

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})u(t)e^{-st}dt = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Es fácil derivar la del seno recordando la identidad de Euler:

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

lo que resulta en:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Observe que hemos usado la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace, que aún no hemos demostrado.

2. Propiedades de la Transformada de Laplace

En esta sección presentamos algunas de las propiedades de la Transformada de Laplace (TL).

2.1. Linealidad

Si $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ entonces:

$$\mathcal{L}\{ax(t) + by(t)\} = aX(s) + bY(s)$$

Prueba:

$$\mathcal{L}\{ax(t)+by(t)\} = \int_0^\infty (ax(t)+by(t))e^{-st}dt = a\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = aX(s)+bY(s). \blacksquare$$

Un ejemplo de la aplicación de la linealidad fue el cálculo de la transformada del coseno.

2.2. Cambio de escala

Si $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ entonces, con $a > 0$:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$$

Prueba:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_0^\infty x(at)e^{-st}dt$$

si cambiamos de variable $\lambda = at$ entonces:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_0^\infty x(at)e^{-st}dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty x(\lambda)e^{-\frac{s}{a}\lambda}d\lambda = \frac{1}{a}X(\frac{s}{a}). \blacksquare$$

Ejemplo: Supongamos que queremos la transformada inversa de:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{10^4s^2 + 10^2s + 1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(\frac{s}{10^{-2}})^2 + (\frac{s}{10^{-2}}) + 1}\}$$

observe que:

$$\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

y entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+s+1}\}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t)$$

por lo que

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(\frac{s}{10^{-2}})^2+(\frac{s}{10^{-2}})+1}\}=\frac{2}{100\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{200}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{200}t)u(t)$$

2.3. Multiplicación por exponencial. Desplazamiento en frecuencia

Si $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}$ entonces,

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}x(t)\}=X(s-\lambda)$$

Prueba:

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}x(t)\}=\int_0^\infty e^{\lambda t}x(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty x(t)e^{-(s-\lambda)t}dt=X(s-\lambda).\blacksquare$$

Observe que no hemos impuesto ninguna restricción a λ

Ejemplo: Tal como vimos antes en el ejemplo del coseno,

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}u(t)\}=\frac{1}{s-j\omega}$$

Otro Ejemplo: Se desea la expresión en el tiempo de la función de transferencia:

$$\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

Observe que:

$$\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

En el primer término reconocemos a un coseno multiplicado por una exponencial y, en el segundo, se encuentra un seno multiplicado por la misma exponencial.

En resumen

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\} = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

2.4. Desplazamiento en el tiempo. Multiplicación exponencial en frecuencia

Si $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)u(t)\}$ entonces $(a > 0)$,

$$\mathcal{L}\{x(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}X(s)$$

Prueba:

$$\mathcal{L}\{x(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty x(t-a)u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty x(t-a)e^{-st}dt$$

si cambiamos la variable $\lambda = t - a$ resulta

$$\int_a^\infty x(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty x(\lambda)e^{-s(\lambda+a)}d\lambda = e^{-as}X(s). \blacksquare$$

Ejemplo: Calculemos la transformada de Laplace de la función pulso unitario:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{todo lo demás} \end{cases}$$

Note que $p(t) = u(t) - u(t-1)$ luego:

$$P(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Nota: Observe que hemos definido esta propiedad sólo para retrasos de la señal original. Pudiéramos usar esta propiedad para adelantos de la función siempre que el adelanto no implique que la señal se desplaza más allá del origen (hacia los tiempos negativos). En ese caso, a la parte de tiempo negativo no se le haría la transformada y, por ende, no tendríamos la equivalencia.

2.5. Multiplicación por t

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ entonces,

$$\mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds}$$

Prueba: Si $X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$ entonces:

$$\frac{dX(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt\right\}$$

como la derivada es en la variable s podemos meterla dentro de la integral resultando

$$\frac{d}{ds}\left\{\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt\right\} = \int_0^\infty x(t)\frac{d}{ds}\left\{e^{-st}\right\}dt = -\int_0^\infty \underbrace{tx(t)}\, e^{-st}dt = -\mathcal{L}\{tx(t)\}.\blacksquare$$

El resultado anterior puede generalizarse:

$$\mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

Ejemplo: Calculemos la transformada de Laplace de $t^2e^{-2t}\cos(3t)u(t)$.

Si vamos por etapas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(3t)u(t)\} &= \tfrac{s}{s^2+3^2} \\
\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(3t)u(t)\} &= \tfrac{s+2}{(s+2)^2+3^2} \\
\mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\cos(3t)u(t)\} &= \tfrac{d^2}{ds^2}\left\{\tfrac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\} = \tfrac{2(s+2)(s^2+4s-23)}{(s^2+4s+13)^3}
\end{aligned}$$

2.6. Transformada de la derivada

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ entonces,

$$\mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\} = sX(s) - x(0)$$

Prueba: Usaremos la integración por partes para resolver la integral de Laplace.

$$\mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{dx} \underbrace{e^{-st}}_{y} dt = x(t)e^{-st}\,|_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = x(0) + sX(s). \blacksquare$$

El resultado obtenido se puede generalizar a cualquier derivada de la forma:

$$\mathcal{L}\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \ldots - sx^{n-2}(0) - x^{n-1}(0)$$

2.7. Transformada de la integral

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ entonces,

$$\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)d\tau\} = \frac{X(s)}{s}$$

Prueba: De nuevo usaremos la integración por partes para resolver la integral de Laplace.

$$\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)d\tau\} = \int_0^\infty \underbrace{\int_0^t x(\tau)d\tau}_{y}\, \underbrace{e^{-st}}_{dx} dt = -\int_0^t x(\tau)d\tau \frac{e^{-st}}{s}\,|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = \frac{X(s)}{s}. \blacksquare$$

Tenemos que hacer dos observaciones, la primera que hemos supuesto que la función $x(t)$ no tiene impulsos en $t = 0$, la segunda es que si en lugar de integrar la función desde $t = 0$ la hubiésemos integrado desde $t = -\infty$ el resultado final hubiese sido:

$$\mathcal{L}\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{q(0)}{s}$$

donde $q(0) = \int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau$.

2.8. Teoremas del valor inicial y final

A partir del resultado de la derivada podemos extraer las tendencias de las funciones en $t = 0$ y $t = \infty$ cuando esos límites existen.

De la transformada de la derivada sabemos que:

$$\int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0)$$

si tomamos el límite con $s \to 0$:

$$\lim_{s\to 0} \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(\infty) - x(0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

si, por el contrario, tomamos el límite con $s \to \infty$:

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$