TRANSFORMADA DE LAPLACE:

- Definición. SEA:

$f_{(t)}$ = UNA FUNCIÓN DEL TIEMPO t

s = UNA VARIABLE COMPLEJA = $\sigma \pm j\omega$

$\mathcal{L}$ = UN SIMBOLO OPERATIVO QUE INDICA LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$F_{(s)}$ = TRANSFORMADA DE LAPLACE DE $f_{(t)}$

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE SE DEFINE COMO:

$$\mathcal{L}[f_{(t)}] = F_{(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(t)} \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$\boxed{F_{(s)} = \int_{0}^{\infty} f_{(t)} \cdot e^{-st} \cdot dt}$$

⇒ TRANSF. DE LAPLACE UNILATERAL POR LA DERECHA. PARA $f_{(t)} = 0 \ \forall \ t < 0$

EL PROCESO INVERSO DE ENCONTRAR LA FUNCIÓN DEL TIEMPO $f_{(t)}$ A PARTIR DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE $F(s)$ SE DENOMINA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_{(s)}] = f_{(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_{(s)} \cdot e^{st} \cdot ds, \quad \text{PARA } t > 0$$

EN DONDE:

c = CONSTANTE REAL, LLAMADA LA ABSCISA DE CONVERGENCIA.

PARA OBTENER $f_{(t)}$ A PARTIR DE $F_{(s)}$ APLICANDO LA DEFINICIÓN DE TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE, ES POCO USUAL Y ENGORROSO, PARA ELLO SE APLICA OTROS MÉTODOS QUE VEREMOS MÁS ADELANTE.

REGIÓN DE CONVERGENCIA DE LA TRANSF. DE LAPLACE:

HAY FUNCIONES ÚTILES QUE NO TIENEN TRANSF. DE FORIER GENERALIZADA

EJEMPLO: $g_{(t)} = A e^{+\alpha t} \mu_{(t)}$; $\alpha > 0$

SIN EMBARGO SÍ TIENE TRANS. LAPLACE

$$G_{(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{\alpha t} \cdot \mu_{(t)} \cdot e^{-st} \cdot dt \Rightarrow$$

$$G_{(s)} = \int_{0}^{\infty} A \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-st} \cdot dt = A \int_{0}^{\alpha} e^{\alpha t} \cdot e^{-(\sigma+\omega)t} \cdot dt$$

$$G_{(s)} = A \int_{0}^{\infty} e^{(\alpha-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

LA INTEGRAL CONVERGE SI $(\alpha - \sigma) < 0$

DE ESTA MANERA ⇒ $\sigma > \alpha$

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha-\sigma)t} = 0$$

$$G_{(s)} = A \int_{0}^{\infty} e^{(\alpha-s)t} \cdot dt = \frac{1}{\alpha - s} \cdot e^{(\alpha-s)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$G_{(s)} = \frac{1}{\alpha - s} \left[\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha-s)t} - 1 \right] = \frac{1}{s-\alpha}$$

LA REGIÓN DE CONVERGENCIA, PUEDE DIFERENCIAR LA TRANSF. DE LAPLACE CUYAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS SON IGUALES:

1) $e^{-\alpha t} \cdot \mu_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+\alpha}$; $\sigma > -\alpha$

2) $e^{-\alpha t} \mu(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{1}{s+\alpha}$; $\sigma < -\alpha$

LA MAYORÍA DE LAS FUNCIONES ÚTILES SON CAUSALES, POR LO TANTO APLICANDO LA TRASF. DE LAPLACE UNILATERAL ES SUFICIENTE Y DE ESTA FORMA SE EVITAN ALGUNOS INCONVENIENTES CON LA REGIÓN DE CONVERGENCIA.

TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL POR LA DERECHA

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

TRANSF. DE LAPLACE DE FUNCIONES ELEMENTALES:

a) ESCALÓN UNITARIO:

$$f(t) = \mu(t)$$

$$F(s) = \int_0^\infty (1) \cdot e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s}\left\{e^{-st}\right\}_0^\infty$$

$$F(s) = -\frac{1}{s}\left\{e^{-\infty} - e^{0}\right\} = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

PARA LA REGIÓN DE CONVERGENCIA

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot dt = \int_0^\infty e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

PARA QUE LA INTEGRAL CONVERGE SI $\sigma > 0$ Y DE ESTA MANERA

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\sigma t} = 0.$$

b) RAMPA UNITARIA

$$f(t) = ramp(t)$$

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$F(s) = t \cdot \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) - \int \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt$$

$$F(s) = -\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^\infty$$

$$F(s) = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{t}{s e^{+st}} - \frac{1}{s^2} e^{-st}\right) - \left(0 - \frac{1}{s^2} e^{0}\right)$$

$$F(s) = (0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

TABLA DE TRANSF. DE LAPLACE UNILATERAL

SEÑAL $x(t)$	$X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	Todo s
$\mu(t)$	$1/s$	$\sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$\mathrm{Sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$e^{-at} \cdot \mathrm{Sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > -a$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

1) LINEALIDAD:

$$\mathcal{L}\{af_{(t)}+b\,g_{(t)}\}=a\mathcal{L}\{f_{(t)}\}+b\mathcal{L}\{g_{(t)}\}$$

2) DIFERENCIACIÓN

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f_{(t)}\right\}=sF_{(s)}-f_{(0)}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f_{(t)}\right\}=s^2F_{(s)}-s\,f_{(0)}-\left.\frac{d}{dt}f_{(t)}\right|_{t=0}$$

EN GENERAL:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f_{(t)}\right\}=s^nF_{(s)}-s^{n-1}f_{(0)}-s^{n-2}\frac{d}{dt}f_{(0)}\ldots$$

$$\ldots-s\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}f_{(0)}-\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f_{(0)}$$

3) INTEGRACIÓN:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_{(t)}\,dt\right\}=\frac{1}{s}F_{(s)}$$

ASUMIENDO CONDICIONES INICIALES IGUAL A CERO.

$$\mathcal{L}\left\{\int^{n} f_{(t)}\,dt\right\}=\frac{F_{(s)}}{s^n}$$

4) TRASLACIÓN REAL

$$\mathcal{L}\{f_{(t-t_0)}\}=e^{-st_0}F_{(s)}$$

$\forall$ $f(t)=0$ PARA $t<0$ $(t<t_0)$

5) TRASLACIÓN COMPLEJA

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cdot f_{(t)}\}=F(s-a)$$

6) TEOREMA DEL VALOR FINAL

SEA $\lim_{t\to\infty} f_{(t)}=$ CTTE, ENTONCES:

$$\lim_{t\to\infty} f_{(t)}=\lim_{s\to 0} sF_{(s)}$$

7) TEOREMA DEL VALOR INICIAL.

$$\lim_{t\to 0} f_{(t)}=\lim_{s\to\infty} sF_{(s)}$$

SOLO SI $f_{(0)}=1$.

EJEMPLO.

OBTENGA LA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES.

1) $y_{(t)}=t\cdot e^{-at}$;

SEA $f_{(t)}=t \Rightarrow F_{(s)}=\frac{1}{s^2}$

ENTONCES:

$$Y_{(s)}=\mathcal{L}\{e^{-at}\cdot t\}=\mathcal{L}\{e^{-at}\cdot f_{(t)}\}\Rightarrow$$

$$Y_{(s)}=F(s+a)=\frac{1}{(s+a)^2}$$

2) $Y_{(t)}=\mu(t-3)\cdot e^{-(t-3)}\cdot\cos[w(t-3)]$

SEA: $f_{(t-3)}=e^{-(t-3)}\cdot\cos[w(t-3)]\Rightarrow$

$$f_{(t)}=e^{-t}\cdot\cos(wt)\Rightarrow$$

$F_{(s)}=\frac{s+1}{(s+1)^2+w^2}$; APLICANDO TRASLACIÓN REAL

$$Y_{(s)}=\mathcal{L}\{\mu_{(t-3)}\cdot f_{(t-3)}\}\Rightarrow$$

$$Y_{(s)}=\frac{(s+1)\,e^{-3s}}{(s+1)^2+w^2}$$

8) DUALIDAD MULTIPLICACIÓN:

$$g_{(t)} * h_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} G_{(s)} . H_{(s)}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA TRASLACIÓN REAL:

$$f(t-\tau_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\tau_0 s} . F_{(s)}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau_0)\} = \int_0^\infty f(t-\tau_0) . e^{-s\tau} . d\tau$$

CAMBIO DE VARIABLE:

$$U = t-\tau_0 \Rightarrow t = U+\tau_0$$

$$dU = dt$$

ENTONCES:

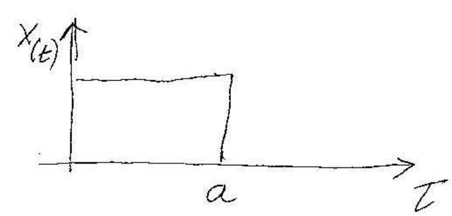
$$\int_0^\infty f_{(U)} . e^{-(U+\tau_0)s} . dU = e^{-\tau_0 s}\int_0^\infty f_{(U)} . e^{-Us} . dU$$

$$= e^{-\tau_0 s} . F_{(s)}$$

EJEMPLO

OBTENGA $X_{(s)}$.

$$X_{(t)} = \mu_{(t)} - \mu_{(t-a)}$$



$$X_{(s)} = \frac{1}{s} - e^{-as} . \frac{1}{s}$$

$$X_{(s)} = \frac{1-e^{-as}}{s}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA DUALIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t) * h(t)\} \Rightarrow$$

$$F(s) = G(s) . H(s)$$

$$F(s) = \int_0^\infty [g(t) * h(t)] . e^{-s\tau} . d\tau$$

$$F(s) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty g(\tau) h(\tau - t) d\tau \right\} e^{-s\tau} . dt$$

$$F(s) = \int_0^\infty g(\tau) \left\{ \int_0^\infty e^{-s\tau} . h(t-\tau) d\tau \right\} d\tau$$

YA QUE $h(t)=0$ PARA $t < \tau$, ENTONCES:

$$F(s) = \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-st} . h(t-\tau) . dt \right] . d\tau$$

CAMBIO DE VARIABLE:

$$V = t - \tau \Rightarrow t = V + \tau$$

$$dV = d\tau \Rightarrow \begin{cases} t = \tau \Rightarrow V = 0 \\ t = \infty \Rightarrow V = \infty \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^\infty g(\tau) \left\{ e^{-s\tau} \int_0^\infty e^{-sV} . h(V) . dV \right\} d\tau$$

$$F(s) = \int_0^\infty g(\tau) . e^{-s\tau} . H(s) . d\tau$$

$$F(s) = H(s) \int_0^\infty g(\tau) . e^{-s\tau} . d\tau = H(s) . G(s)$$

$$F(s) = H(s) . G(s) \quad lqqd$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

SEA:

$$X_{(s)} = \mathcal{L}\{X_{(t)}\}$$

ENTONCES:

$$X_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}\{X_{(s)}\}$$

TRANSF. DE LAPLACE INVERSA, MEDIANTE LA TECNICA DE FRACCIONES PARCIALES:

$$Y_{(s)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots a_1 S + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

1) RAICES REALES NO REPETIDAS.

$$Y_{(s)} = \frac{N(s)}{(S+P_1)(S+P_2)\cdots(S+P_n)}$$

$$Y_{(s)} = \frac{A_1}{S+P_1} + \frac{A_2}{S+P_2} + \cdots + \frac{A_n}{S+P_n}$$

$$A_n = (S+P_n).\, Y_{(s)} = (S+P_n)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{S=P_n}$$

EJEMPLO:

OBTENGA $y(t)$ DE LA SIG. ECUACIÓN DIFERENCIAL, SABIENDO QUE:

$$X_{(t)} = \delta_{(t)}\ ;\ y_{(0)} = 2\ ;\ \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0} = -4$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y_{(t)} + 7\frac{d}{dt}y_{(t)} + 2y_{(t)} = $$

APLICANDO $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}y_{(t)}\right\} = S^2Y_{(s)} - SY_{(0)} - \frac{dX_{(0)}}{dt}$$

$$= S^2Y_{(s)} - 2S + 4$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}Y_{(t)}\right\} = SY_{(s)} - Y_{(0)} = SY_{(s)} - 2$$

ENTONCES:

$$S^2Y_{(s)} - 2S + 4 + 7SY_{(s)} - 14 + 2Y_{(s)} = X_{(s)}$$

$$Y_{(s)}\left[S^2 + 7S + 2\right] - 10 - 2S = 1$$

$$Y_{(s)} = \frac{2S+11}{S^2+7S+2} = \frac{2S+11}{(S+3)(S+4)}$$

$$Y_{(s)} = \frac{A_1}{S+3} + \frac{A_2}{S+4}$$

$$A_1 = (S+3).\left[\frac{2S+11}{(S+3)(S+4)}\right]_{S=-3} = \left[\frac{2S+11}{S+4}\right]_{S=-3} = \frac{2(-3)+11}{-3+4} = 5$$

$$A_2 = \left[\frac{2S+11}{(S+3)}\right]_{S=-4} = \frac{2(-4)+11}{(-4+3)} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$Y_{(s)} = \frac{5}{S+3} - \frac{3}{S+4} \Rightarrow \boxed{y_{(t)} = 5e^{-3t} - 3e^{-4t}}$$

2) RAICES REALES REPETIDAS.

$$Y_{(s)} = \frac{N(s)}{(S+P_1)^m.(S+P_2)}$$

$$Y_{(s)} = \frac{A_1}{(S+P_1)^m} + \frac{A_2}{(S+P_1)^{m-1}} + \cdots \frac{A_m}{S+P_1} + \frac{B_1}{S+P_2}$$

$$A_m = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{S\to -P_1}\frac{d^{m-1}}{dS^{m-1}}\left[(S+P_m)^m Y_{(s)}\right]$$

EJEMPLO:

RESUELVA LA SIG. ECUACIÓN DIFERENCIAL SABIENDO QUE $X_{(t)} = e^{-t}$ Y TODAS LAS CONDICIONES INICIALES SON IGUAL A CERO

$$\frac{d^2}{dt^2} y_{(t)} + 3\frac{d}{dt} y_{(t)} + 2y_{(t)} = X_{(t)}$$

$$s^2 Y_{(s)} + 3s Y_{(s)} + 2Y_{(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$Y_{(s)}\left[s^2+3s+2\right] = \frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$Y_{(s)} = \frac{1}{(s^2+3s+2)(s+1)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)(s+1)}$$

$$Y_{(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{A_1}{(s+1)^2} + \frac{A_2}{(s+1)} + \frac{B}{s+2}$$

$$B = \left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = \frac{1}{(-2+1)^2} = 1$$

$$A_1 = \left.(s+1)^2 \cdot \left(\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}\right)\right|_{s=-1} = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1} = 1$$

$$A_2 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s\to -1} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left((s+1)^2 \cdot \frac{1}{(s+2)(s+1)^2}\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{1!} \lim_{s\to -1} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1}\left(-\frac{1}{(s+2)^2}\right) = -\frac{1}{(-1+2)^2} = -1$$

$$Y_{(s)} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)}$$

POR LO TANTO:

$$y_{(t)} = e^{-2t} - e^{-t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = ramp(t)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = ramp(t) . e^{-t}$$

ENTONCES:

$$y_{(t)} = e^{-2t} - e^{-t} + e^{-t} ramp(t)$$

3) POLOS COMPLEJOS

$$P_1 = \sigma + j\omega \ ; \ P_2 = \sigma - j\omega$$

$$Y_{(s)} = \frac{N(s)}{(s+\sigma+j\omega)(s-\sigma-j\omega)} ;$$

$$Y_{(s)} = \frac{N_1}{(s-\sigma+j\omega)} + \frac{N_2}{(s-\sigma-j\omega)}$$

$$N_1 = \left.(s-\sigma+j\omega)\, Y_{(s)}\right|_{s=\sigma+j\omega} = B+jC$$

$$N_2 = \left.(s-\sigma-j\omega) . Y_{(s)}\right|_{s=\sigma-j\omega} = B-jC$$

$$y_{(t)} = e^{\sigma t}\left[2B\cos(\omega t) - 2C\, Sen(\omega t)\right]$$

$$y_{(t)} = 2\sqrt{B^2+C^2} . e^{\sigma t} . Sen(\omega t - \theta)$$

$$\theta = Tg^{-1}\left(\frac{C}{B}\right)$$

Ander Miranda

EJEMPLO

DADA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL:

$$\frac{d^2 y_{(t)}}{dt^2} + 2\frac{d}{dt}y_{(t)} + 5y_{(t)} = 3\mu_{(t)}$$

CUYAS CONDICIONES INICIALES SON CERO, CALCULE $y_{(t)}$.

Solución:

$$s^2 Y_{(s)} + 2sY_{(s)} + 5Y_{(s)} = 3\mu_{(s)}$$

$$Y_{(s)} = \frac{3}{s^2+2s+5}\cdot\frac{1}{s} = \frac{3}{(s+1+2j)(s+1-2j)s}$$

LAS RAÍCES SON:

$S_1 = 0$

$$S_{2,3} = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = -1\pm 2j = \underset{\sigma}{(-1)} \pm j\underset{\omega}{(2)}$$

$$Y_{(s)} = \frac{N_1}{(s+1-2j)} + \frac{N_2}{(s+1+2j)} + \frac{N_3}{s}$$

$$N_1 = \left.\frac{3}{(s+1-2j)s}\right|_{s=-1-2j} = \frac{3}{(-1-2j+1-2j)(-1-2j)}$$

$$N_1 = \frac{3}{-4j(-1-2j)} = \frac{3}{-8+4j} = \frac{3}{4(-2+j)}$$

$$N_1 = \frac{3}{4(-2+j)} * \frac{-2+j}{-2+j} = \frac{3(-2+j)}{4(2^2+1^2)} = \frac{-6+3j}{20}$$

$$N_1 = \underset{B}{\left(-\frac{3}{10}\right)} + j\underset{C}{\left(\frac{3}{20}\right)} \quad ; \quad N_2 = \underset{B}{\left(\frac{-6}{20}\right)} - j\underset{C}{\left(\frac{3}{20}\right)}$$

$$N_3 = \left.\frac{3}{s^2+2s+5}\right|_{s=0} = 3/5$$

$$Y_{(s)} = \frac{(-6+3j)/20}{s+1-2j} + \frac{(-6+3j)/20}{s+1+2j} + \frac{3/5}{s}$$

$$y_{(t)} = e^{-t}\left[2\cdot\left(\frac{-3}{10}\right)\cos(2t) - 2\left(\frac{3}{20}\right)\mathrm{sen}(2t)\right]$$

$$y_{(t)} = -e^{-t}\left(\frac{3}{5}\cos 2t + \frac{3}{10}\,\mathrm{sen}\,2t\right) + \frac{3}{5}\mu_{(t)}$$

$$y_{(t)} = 2\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{20}\right)^2}\cdot e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t-\theta)$$

$$y_{(t)} = -\frac{3\sqrt{5}}{10}\cdot e^{-t}\cdot\mathrm{sen}(2t+2{,}678) + \frac{3}{5}\mu_{(t)}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{C}{B}\right)\text{rad.} = tg^{-1}\left(\frac{3/20}{6/20}\right) = 2{,}678$$

METODO 2: COMPLETANDO CUADRADOS

$$Y_{(s)} = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}$$

$$A = \left.\frac{3}{s^2+2s+5}\right|_{s=0} = 3/5$$

$$\frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{s^2(B+3/5)+s(C+6/5)+3}{}$$

$B + 3/5 = 0 \Rightarrow B = -3/5$

$C + 6/5 = 0 \Rightarrow C = -6/5$

$3 = 3$

$$Y_{(s)} = \frac{3/5}{s} + \frac{-3/5\,s - 6/5}{s^2+2s+5}$$

$$(s+a)^2 = s^2 + 2as + a^2$$

$$s^2+2s+5 = s^2+2as+a^2$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$a^2 = (1)^2 = 1$$

$$s^2+2s+1-1+5 = (s+1)^2+4$$

POR LO TANTO:

$$Y_{1}(s) = \frac{-\frac{3}{5}(s+2)}{(s+1)^2+4} = \frac{-\frac{3}{5}[s+1-1+2]}{(s+1)^2+4}$$

$$Y_1(s) = \frac{-\frac{3}{5}(s+1)}{(s+1)^2+(2)^2} - \frac{\frac{3}{5}(1)}{(s+1)^2+(2)^2}$$

$$Y_1(s) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$y_1(t) = -\frac{3}{5} e^{-t}\cos(2t) - \frac{3}{10} e^{-t} \cdot \operatorname{Sen}(2t)$$

$$y(t) = \frac{3}{5} - e^{-t}\left(\frac{3}{5}\cos 2t + \frac{3}{10}\operatorname{Sen} 2t\right)$$

OTRA FORMA

EJERCICIOS:

1) OBTENGA $y(t)$, TODAS LAS CONDICIONES INICIALES SON CERO

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 2\mu(t)$$

$$y(t) = -e^{-t}(t^2+2t+2)\mu(t) + 2\mu(t)$$

2) OBTENGA $X(t)$, DONDE:

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + 3\frac{d}{dt}X(t) + 2X(t) = 5\mu(t)$$

$$X(t) = \left(\frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}\right)\mu(t)$$

3) RESUELVA LA SIG. ECUACIÓN DIFERENCIAL:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 9\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 9\frac{d}{dt}y(t) + 25 = \frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$y(t) = \frac{-3}{2}e^{-3t} + e^{-2t}\left(\frac{3}{2}\cos t - \frac{3}{6}\operatorname{Sen} t\right)$$