DISEÑO DE CONTROLADORES APLICANDO LGR

Para realizar el diseño de controladores aplicando el método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR), nos apoyamos de la condición de magnitud y fase del mismo, considere el siguiente sistema en lazo cerrado:

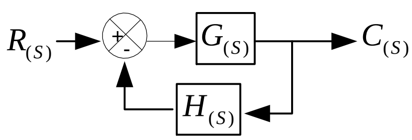

Fig. 1
Sistema Retroalimentado

La función d transferencia en cadena cerrada esta dada por:

$$\frac{C_{(S)}}{R_{(S)}} = \frac{G_{(S)}}{1+G_{(S)}H_{(S)}}$$

La ecuación característica esta dada por:

$$1+G_{(S)}H_{(S)}=0$$
$$G_{(S)}H_{(S)}=-1$$

Dado que $G_{(S)}H_{(S)}$ es una cantidad compleja (parte real y parte imaginaria), para que dicha igualdad se cumpla, se deben cumplir las siguientes dos condiciones (ecuaciones) escalares:

1. Condición de Magnitud: $\left|G_{(S)}H_{(S)}\right|=1$

2. Condición de Fase: $\angle G_{(S)}H_{(S)}=\pm 180(2h+1)$;
donde: h=0, 1, 2, 3, … N

Los valores de la variable "S" que cumplan con las dos condiciones anteriores son las raíces de la ecuación característica o polos del sistema en cadena cerrada, por lo tanto dichos valores son puntos que pertenecen al LGR. Las dos condiciones anteriores, se usan en el cálculo de controladores en el plano-S, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

Dado el sistema mostrado en la figura 2, aplicando la técnica del LGR determine y calcule los parámetros del controlador (P, PI o PD) adecuado para que el sistema responda de acuerdo a los polos dominantes: $S_{1,2}=-2\pm j2$.

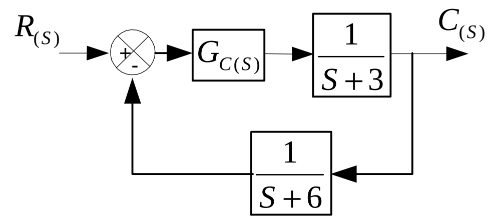

Fig. 2

Solución:
La función de transferencia en lazo abierto (LA) con el controlador esta dada por:

$$G_{(S)}H_{(S)}=\frac{G_{C(S)}}{(S+3)(S+6)}$$

Para determinar el tipo controlador adecuado, se traza el LGR aproximado del sistema en LA con cada uno de los controladores candidatos, luego se selecciona el controlador que haga que las ramas del LGR del sistema, contengan a los polos dominantes deseados.

a.- Usando un controlador proporcional (P)

$$G_{(S)}H_{(S)}=\frac{K_C}{(S+3)(S+6)}$$

El LGR aproximado es:

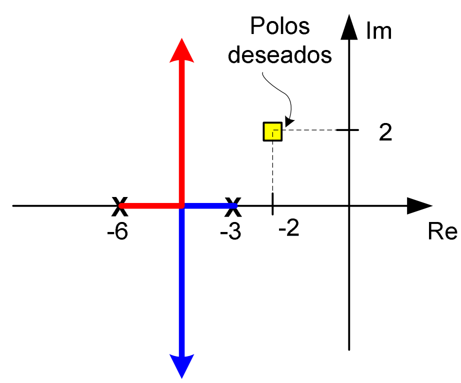

Fig. 3
Lugar Geométrico, considerando un controlador proporcional

Se puede observar que las ramas del LGR no tienen posibilidad de contener a los polos deseados.

b.- Usando un controlador Proporcional-Derivativo (PD)

$$G_{(S)}H_{(S)}=\frac{K_C(1+T_D S)}{(S+3)(S+6)}$$

Usando este controlador existen dos posibilidades para ubicar en el plano de laplace el cero del controlador

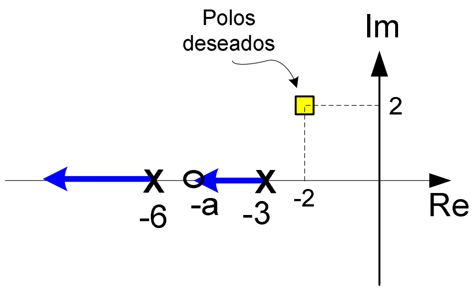

Fig. 5
LGR usando un controlador PD.

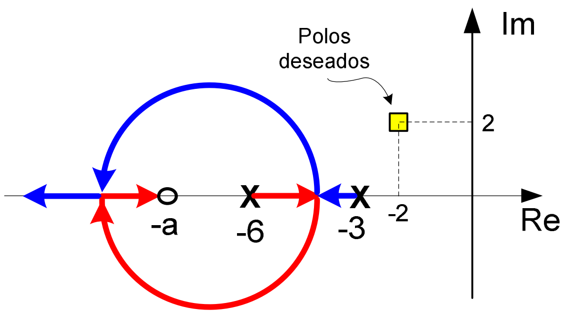

Fig. 5
LGR usando un controlador PD.

En las dos graficas del LGR se visualiza que ninguna de las ramas del LGR puede contener los polos deseados.

c.- Asumiendo controlador Proporcional-Integrativo PI.

$$G_{(S)}H_{(S)} = \frac{K_C(S+a)}{(S+3)(S+6)S}$$

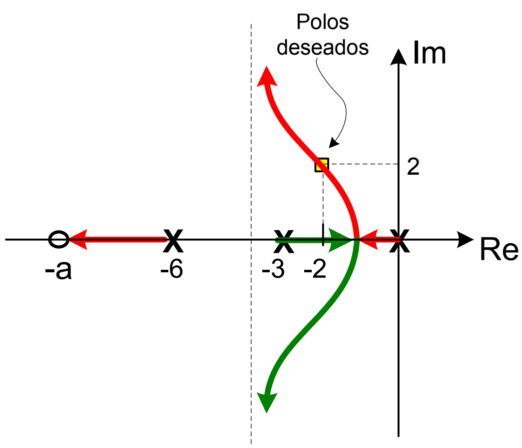

Fig. 6
LGR usando un controlador PI

Se observa que existen dos ramas del LGR que pasan por los polos deseados, por lo tanto el controlador adecuado es el PI.

.- *Cálculo de los parámetros del controlador:*

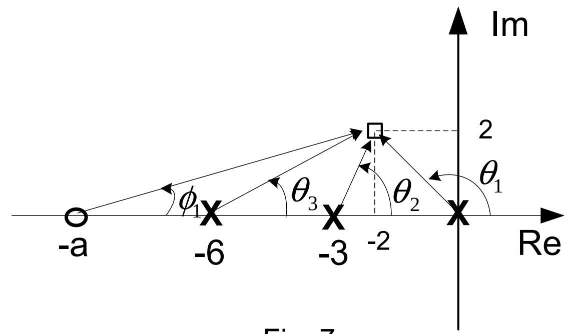

Fig. 7
Evaluación del LGR en los polos deseados

.- Aplicando la condición de fase:

$$\angle G_{(S)}H_{(S)} = \pm 180(2h+1) \Rightarrow \sum \theta_{pi} - \sum \theta_{zi} = 180$$

$$\theta_1 = 180 - arctg(2/2) = 135$$

$$\theta_2 = arctg(2/1) = 63{,}43$$

$$\theta_3 = arctg(2/4) = 26{,}56$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \phi_1 = 180^O \Rightarrow \phi_1 = 45$$

Por otro lado se tiene que:

$$\phi_1 = arctg\left(\frac{2}{a-2}\right) = 45 \Rightarrow \frac{2}{a-2} = 1$$

$$\boxed{a = 4}$$

.- Aplicando la condición de magnitud: $\left|G_{(S)}H_{(S)}\right| = 1$

$$P1 = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} \quad ; \quad P2 = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$P3 = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} \ ; \ Z1 = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$

Luego:

$$\frac{K_C Z1}{P1.P2.P3} = 1 = K_C\sqrt{\frac{8}{8.5.20}} = K_C\sqrt{\frac{1}{100}} \Rightarrow$$

$$\frac{K_C}{10} = 1 \Rightarrow \boxed{K_C = 10}$$

Observe que si está lo suficientemente familiarizado con la técnica del LGR, no será necesario graficar el LGR para cada uno los controladores.