EJEMPLO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

1. Simplifique el diagrama de bloques de la figura 3-27.

Solución. Primero, mueva el punto de ramificación de la trayectoria que contiene H_1 fuera del lazo que contiene H_2 como se aprecia en la figura 3-28(a). Luego eliminar dos lazos produce la figura 3-28(b). Al combinar dos bloques en uno se obtiene la figura 3-28(c).

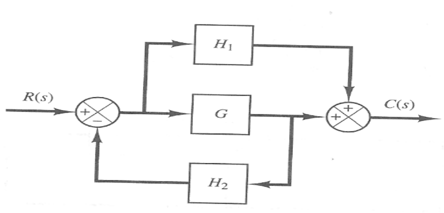


Figura 3-27
Diagrama de bloques de un sistema.

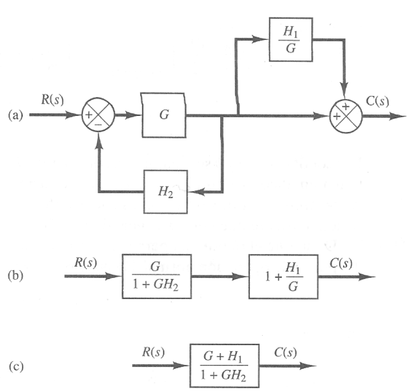


Figura 3-28
Diagramas de bloques simplificados para el sistema que aparece en la figura3-27.

2. Simplifique el diagrama de bloques de la figura 3-29. Obtenga la función de transferencia que relaciona C(s) con R(s).

Solución. El diagrama de bloques de la figura 3-29 se modifica para obtener el que se muestra en la figura 3-30(a). Luego obtenemos la figura 3-30(b), que se simplifica a la que se muestra en la figura 3-30(c). Así, la función de transferencia *C(s)/R(s)* es igual a:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

También se obtiene el mismo resultado procediendo del modo siguiente. Dado que la señal *X(s)* es la suma de dos señales $G_1R(s)$ y $R(s)$, tenemos que

$$X(s) = G_1R(s) + R(s)$$

La señal de salida *C(s)* es la suma de $G_2X(s)$ y $R(s)$. Por tanto

$$C(s) = G_2X(s) + R(s) = G_2[G_1R(s) + R(s)] + R(s)$$

Así obtenemos el mismo resultado que antes:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

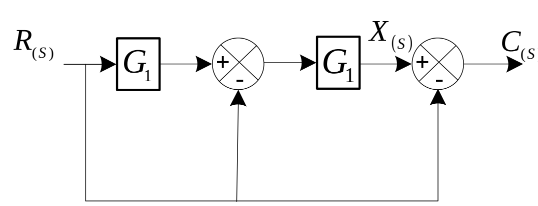


Figura 3-29

Diagrama de bloques de un sistema.

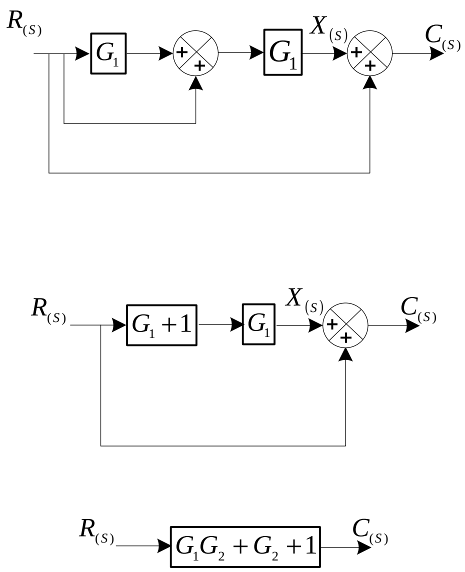
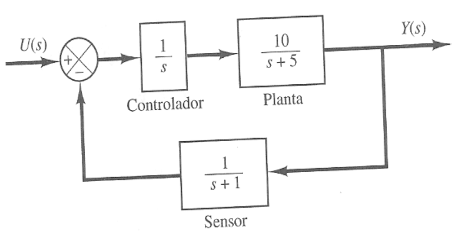


Figura 3-30
Reducción del diagrama de bloques que aparece en la figura 3-29

3. Obtenga el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la figura 3-31.

Solución. El sistema contiene un integrador y dos con retraso. La salida de cada integrador o con retraso puede ser una variable de estado. Definamos la salida de la planta como x_1, la salida del controlador



como x_2 y la salida del sensor como x_3.

Figura 3-31
Sistema de control.

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{10}{s+5}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_3(s)} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

Que puede escribirse como

$$sX_1(s) = -5X_1(s) + 10X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -X_3(s) + U(s)$$

$$sX_3(s) = X_1(s) - X_3(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de las cuatro ecuaciones precedentes, obtenemos

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_3$$

$$y = x_1$$

Por tanto, un modelo en el espacio de estados del sistema en la forma estándar se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Es importante observar que ésta no es la única representación en el espacio de estados del sistema. Son posibles muchas otras representaciones en el espacio de estados. Sin embargo, la cantidad de variables de estado es igual en cualquier representación en el espacio de estados del mismo sistema. En este sistema, las variables de estado son tres, sin considerar cuales se elijan como variables de estado.

4. **Obtenga un modelo en el espacio de estados para sistema que aparece en la figura 3-32(a).**

Solución. Primero, considere que $(as+b)/s^2$ involucra una derivada. Tal derivada se evita si modificamos $(as+b)/s^2$ como

$$\frac{as+b}{s^2}=\left(a+\frac{b}{s}\right)\frac{1}{s}$$

Usando esta modificación, el diagrama de bloques de la figura 3-32(a) se convierte en el que se muestra la figura 3-32(b).

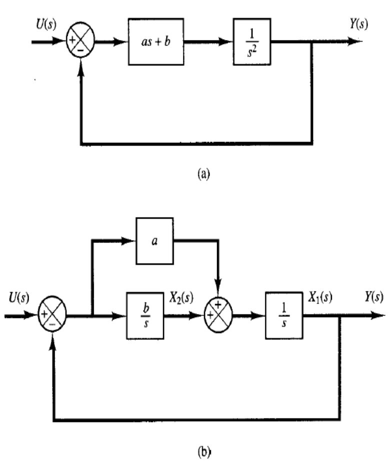


Figura 3-32
(a) Sistema de control; (b) diagrama de bloques modificado.

Defina las salidas de los integradores como variables de estado, tal como se aprecia en la figura 3-32(b). Después, a partir de la figura 3-32(b) obtenemos

$$\frac{X1(s)}{X2(s)+a[U(s)-X1(s)]}=\frac{1}{s}$$

$$\frac{X2(s)}{U(s)-X1(s)}=\frac{b}{s}$$

$$Y(s) = X1(s)$$

que puede modificarse como

$$sX1(s) = X2(s) + a[U(s) - X1(s)]$$

$$sX2(s) = -bX1(s) + bU(s)$$

$$Y(s) = X1(s)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de las tres ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\dot{x}1=-ax1+x2+au$$

$$\dot{x}2=-bx1+bu$$

$$y=x1$$

Si reescribimos las ecuaciones de estado y de salida en la forma matricial estándar, obtenemos

$$\begin{bmatrix}\dot{x}1\\ \dot{x}2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & 1\\ -b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\ x2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}u$$

$$Y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\ x2\end{bmatrix}$$

5. **Obtenga una representación en el espacio de estados del sistema que aparece en la figura 3-33(a).**

Solución. En este problema, primero expanda (s + z)/(s + p) en fracciones parciales.

$$\frac{s+z}{s+p}=1+\frac{z-p}{s+p}$$

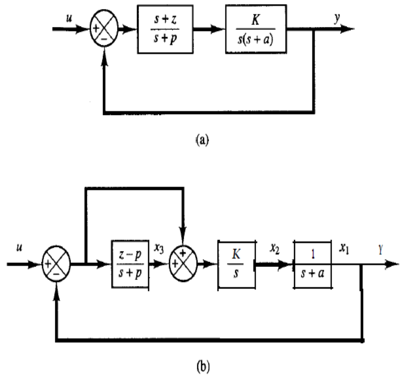


Figura 3-33
(a) sistema de control; (b) diagrama de bloques que define las variables de estado para el sistema.

A continuación convierta K/[s(s + a)] en el producto de K/s y 1/ (s + a). Después, vuelva a dibujar el diagrama de bloques como aparece en la figura 3-33(b). Definiendo un conjunto de variables de estado, según se aprecia en la figura 3-33(b), obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x}1 = -ax1 + x2$$
$$\dot{x}2 = -Kx1 + Kx3 + Ku$$
$$\dot{x}3 = -(z-p)x1 - px3 + (z-p)u$$
$$y = x1$$

Reescribiendo la ecuación, nos da

$$\begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \\ \dot{x}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ -(z-p) & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ z-p \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

Observe que la salida del integrador y las salida de los integradores con retraso de primer orden [1/(s + a) y (z - p)/(s + p)] se eligen como variables de estado. Es importante recordar que la salida del bloque (s + z)/(s + p) de la figura 3-33(a) no puede ser una variable de estado, porque este bloque contiene una derivada, s + z.

6. **Considere un sistema definido por las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$$

Obtenga la función de transferencia G(s) del sistema.

Solución. Remitiéndonos a la ecuación (3-32), la función de transferencia del sistema se obtiene del modo siguiente (observe que en este caso D=0):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{-1}{(s+2)(s+4)} \\ \dfrac{3}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{s+5}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{12s + 59}{(s+2)(s+4)}$$

A-3-15. Considere el sistema del nivel de líquido de la figura 3-43. En el sistema, $\overline{Q}_1 y \overline{Q}_2$ son flujos de entrada en estado estable y $\overline{H}_1 y \overline{H}_2$ son las alturas en estado estable.

Las cantidades $q_{i1}, q_{i2}, h_1, h_2, q_1 y q_{2,}$ se consideran pequeñas. Obtenga una representación en el espacio de estados para el sistema cuando $h_1 y h_2$, son la salidas y $q_{i1} y q_{i2}$ son las entradas.

Solución. Las ecuaciones para el sistema son

$C_1 dh_1 = (q_{i1} - q_1)dt$
(3-101)

$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1$
(3-102)

$C_1 dh_2 = (q_1 - q_{i2} - q_0)dt$
(3-103)

$\frac{h_2}{h_2} = q_0$
(3-104)

La eliminación de q1 de la ecuación (3-101), usando la ecuación (3-102), da como resultado

$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{C1}\left(q_{i1} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right)$
(3-105)

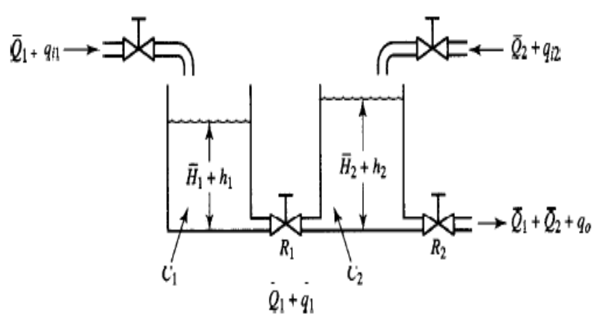


Figura 3-43

Sistema del nivel de líquido

La eliminación de $q_1 y q_0$. de la ecuación (3-103), usando las ecuaciones (3-102) y (3-104), nos lleva a

$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} + q_{i2} - \frac{h_2}{R_2}\right)$
(3-106)

Defina las variables de estado x1 y x2 mediante

$x_1 = h_1 \quad ; \quad x_2 = h_2$

las variables de entrada u1 y u2, mediante

$u_1 = q_{i1} \quad ; \quad u_2 = q_{i2}$

y las variables de salida y1 y y2 mediante

$y_1 = x_1 = h_1 \quad ; \quad y_2 = x_2 = h_2$

A continuación, las ecuaciones (3-105) y (3-106) se escriben como

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1C_1}x_1 + \frac{1}{R_2C_2}x_2 + \frac{1}{C_1}u_1$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{R_1C_2}x_1 - \left(\frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_2}\right)x_2 + \frac{1}{C_2}u_1$$

En la forma de la representación matricial estándar, tenemos

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_1C_1} & \dfrac{1}{R_1C_1}\\ \dfrac{1}{R_{11}C_{22}} & -\left(\dfrac{1}{R_1C_2}+\dfrac{1}{R_2C_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

que es la ecuación de estado, y

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

que es la ecuación de salida.

PROBLEMAS

B-3-1. Simplifique el diagrama de bloques que aparece en la figura **3-50** y obtenga la función de transferencia en lazo cerrado **C(s)/R(s)**.

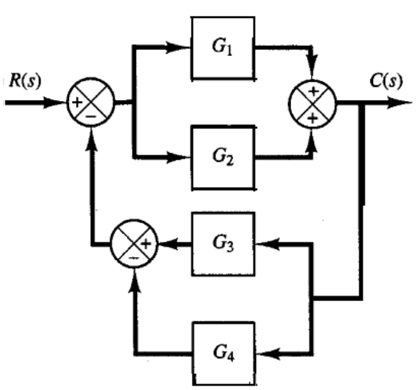


Figura 3-50 Diagrama de Bloques de un sistema.

B-3-4. Obtenga una representación de espacio de estados del sistema de la figura 3-53.

B-3-5. Considere el sistema descrito mediante

y``` + 3y´´ + 2y´ = µ

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema.

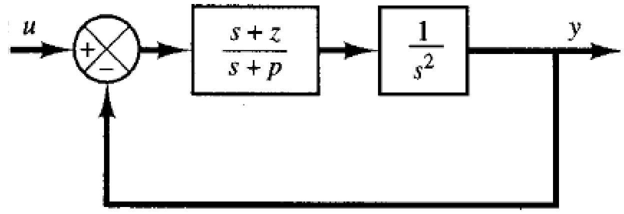


Figura 3-53 Sistema de control.

B-36. Considere el sistema descrito mediante

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Obtenga la función de transferencia del sistema.

B-3-12 Obtenga la función de transferencia del sistema eléctrico de la figura 3-59. Dibuje un diagrama esquemático de un sistema mecánico análogo.

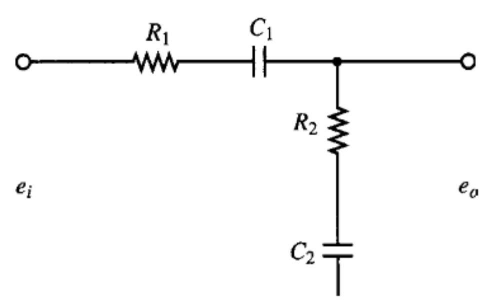
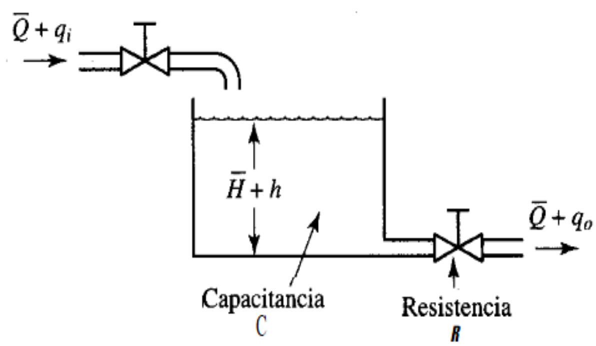


Figura 3-59 Sistema eléctrico.



B-3-13 Considere un sistema de nivel de liquido de la figura 3-60. Suponiendo que $\bar{H}$ =3cm, $\bar{Q}$=0.02m^3/seg, y que el área transversal del tanque es igual a 5m^3, obtenga la constante de tiempo del sistema en el punto en el punto de operación ($\bar{H}$, $\bar{Q}$). Suponga que el flujo a través de la válvula es turbulento.

B-3-14 Considere el sistema del tanque de agua cónico de la figura 3-61. El flujo a través de la válvula es turbulento y se relaciona con la altura H mediante

Q=0.005$\sqrt{H}$

En donde Q es el flujo medido en m^3/seg y H esta en metros.Suponga que la altura es de 2m en t=0. ¿Cuál es la altura en t=60seg?

B-3-15 Considere el sistema del nivel de liquido de la figura 3-62. En estado estable el flujo de entrada es $\bar{Q}$ y el flujo de salidos es también $\bar{Q}$. Suponga que en t=0, el flujo el flujo de entrada cambia de $\bar{Q}$ a $\bar{Q}$+ q_i, en donde q_i es una cantidad pequeña. La entrada de perturbación es de q_d, también es una cantidad pequeña, dibuje un diagrama de bloques del sistema y simplifíquelo para obtener $H_2(s)$ como una función de $Q_i(s)$ y $Q_d(s)$, en donde $H_2(s)=\zeta[h_2(t)]$, $Q_i(s)=\zeta[q_i(s)]$ y $Q_d(s)=\zeta[q_d(s)]$. Las capacitancias de los tanques 1 y 2 con C1 y C2, respectivamente.

Figura 3-60 Sistema del nivel de líquido.

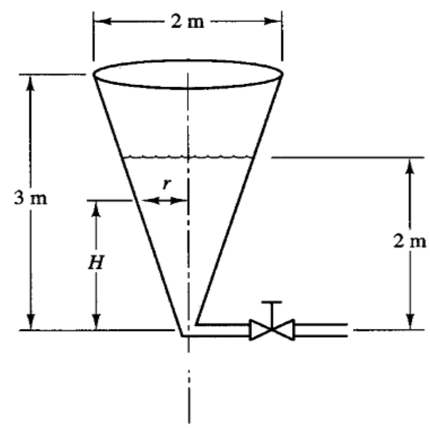


Figura 3-61 Sistema del tanque de agua.

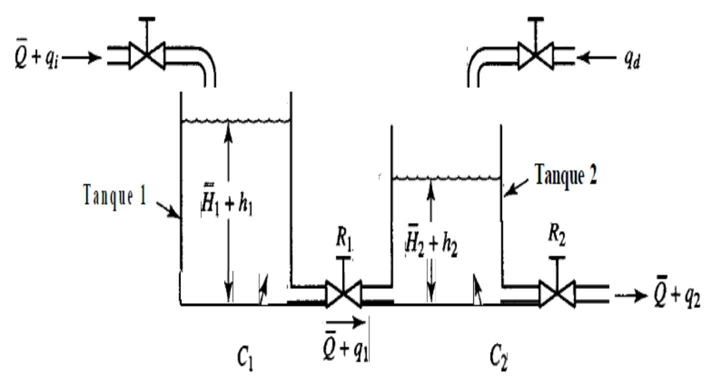


Figura 3-62 Sistema de nivel de líquido.