FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN LAZO CERRADO DE UN SISTEMA DE CONTROL EN LAZO CERRADO

DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA DE CONTROL DIGITAL

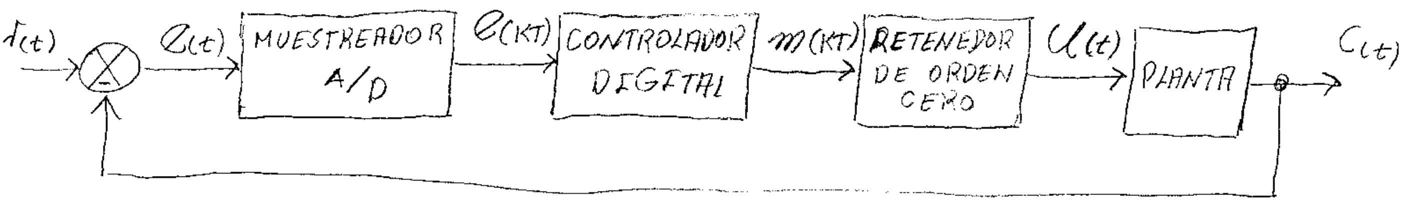
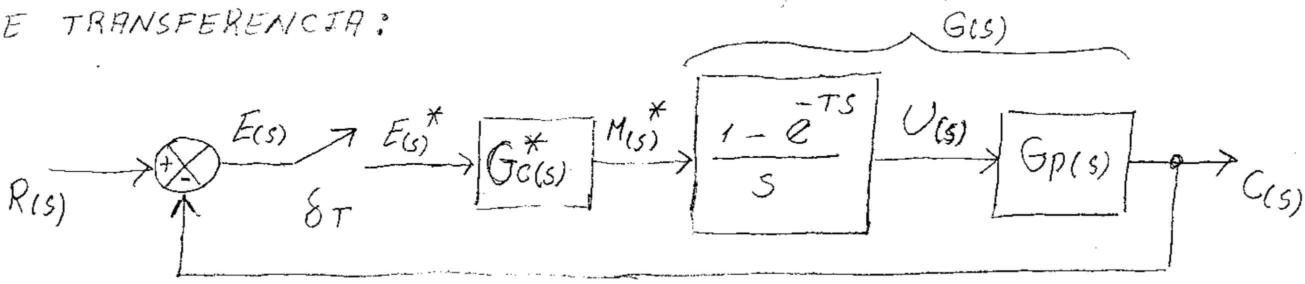


DIAGRAMA DE BLOQUES EQUIVALENTE, CON LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA:



CÁLCULO DE LA FUNC. DE TRANSF.

1) $G(s) = \frac{1-e^{-TS}}{S} * G_p(s)$

2) $C(s) = G(s) \cdot M(s)^* = G(s) \cdot G_c^*(s) \cdot E(s)^*$

APLICANDO ASTERISCO:

$C(s)^* = G(s)^* \cdot G_c^*(s) \cdot E(s)^*$

3) $E(s)^* = R(s)^* - C(s)^*$ SUSTITUYO

ENTONCES:

$C(s)^* = G(s)^* \cdot G_c(s)^* \left[R(s)^* - C(s)^* \right] \Rightarrow$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z) \cdot G(z)}{1 + G_D(z) \cdot G(z)}$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PULSO DE UN PID DIGITAL.

$$m(t) = K_c e(t) + \frac{K_c}{T_i}\int_0^{\tau} e(t) \cdot d\tau + K_c T_d \frac{d}{d\tau} e(t)$$

DISCRETIZANDO LA ECUACIÓN, Y LUEGO APLICANDO TRANSF. Z, SE DEMUESTRA:

$$G_c(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})$$

DONDE:

$K_p = K_c - \frac{K_c T}{2T_i}$; $K_I = \frac{KT}{T_i}$

$K_D = \frac{KT_d}{T}$.

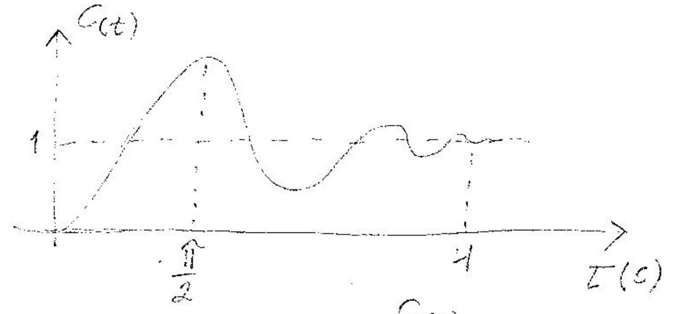
$$G_{PD(z)} = \frac{K(z-a)}{z} \Rightarrow \begin{cases} K = K_p + K_D \\ a = \frac{K_D}{K_p + K_D} \end{cases}$$

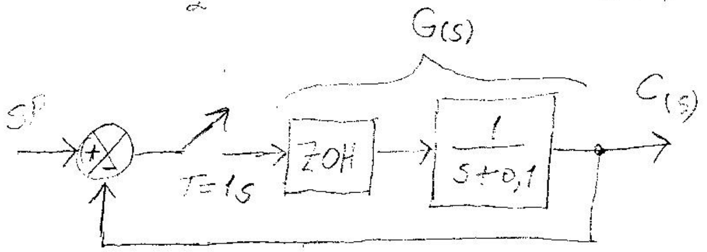
$$G_{PI(z)} = \frac{K(z-b)}{(z-1)} \Rightarrow \begin{cases} K = K_p + K_I \\ b = \frac{K_p}{K_p + K_I} \end{cases}$$

Prof. Ander Miranda

EJEMPLO

PARA EL SISTEMA DE CONTROL DIGITAL QUE SE MUESTRA, CALCULE LOS PARAMETROS DEL CONTROLADOR QUE MEJORE LA RESPUESTA TRANSITORIA, HACIENDO QUE SU RESPUESTA EN LAZO CERRADO SEA:





Solución:

HAY QUE USAR UN PD: $\dfrac{K(z-a)}{z}$

* CALCULO DE LOS POLOS DOMINANTES

* $T_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} = \dfrac{4}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 1$

* $T_{max} = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\omega_d = 2$

* $S_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -1 \pm j2$

$z = e^{TS} = e^{1(-1+j2)} = e^{-1}[\cos(2) + j\,\mathrm{Sen}(2)]$

$z = -0{,}153 + j0{,}334$

* FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN LAZO ABIERTO.

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

* $G(s) = \dfrac{1-e^{-TS}}{S} \times \dfrac{1}{S+0{,}1} \Rightarrow$

* $GH(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\dfrac{1}{S(S+0{,}1)}\right\} \Rightarrow$

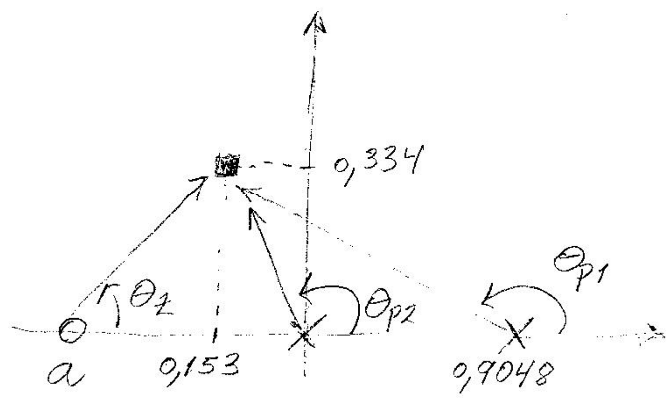
$$GH(z) = (1-z^{-1}) \cdot \left\{\frac{10}{1-z^{-1}} - \frac{10}{1-e^{-0{,}1}z^{-1}}\right.$$

$$GH(z) = \frac{0{,}952}{z-0{,}9048}$$

ENTONCES:

$$G_c(z) \cdot GH(z) = \frac{0{,}952\,K\,(z-a)}{z\,(z-0{,}9048)}$$

* CONFIGURACIÓN POLOS Y CEROS:



* CONDICIÓN DE FASE:

$$\sum \theta_p - \sum \theta_z = 180°$$

Prof. Ander Miranda

$$*\ \theta_{p1} = 180^\circ - tg^{-1}\left(\frac{0,334}{0,9048+0,153}\right) = 162,47$$

$$*\ \theta_{p2} = 180 - tg^{-1}\left(\frac{0,334}{0,153}\right) = 114,61^\circ$$

$$*\ \theta_{p1} + \theta_{p2} - \theta_z = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\theta_z = 97,08^\circ$$

PERO:

$$\theta_z = tg^{-1}\left(\frac{0,334}{a-0,153}\right) = 97,08^\circ \Rightarrow$$

$$a - 0,153 = \frac{0,334}{-8,05} \Rightarrow a = 0,1115$$

* CONDICIÓN DE MAGNITUD.

$$|F(z)|_{z_0} = 1$$

$$P_1 = \sqrt{(0,334)^2 + (0,9048+0,153)^2} = 1,1092$$

$$P_2 = \sqrt{(0,334)^2 + (0,153)^2} = 0,3673$$

$$Z = \sqrt{(0,334)^2 + (0,1115+0,153)^2} = 0,4260$$

ENTONCES:

$$\frac{0,952 \cdot K \cdot (0,4260)}{(1,1092)(0,3673)} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{K = 1}$$

$$Gc(s) = \frac{1\,(z - 0,1115)}{z}$$

* PARÁMETROS DEL CONTROLADOR

$$K_0 = K_P + K_D = 1$$

$$a = \frac{K_D}{K_P + K_D} = 0,1115$$

POR LO TANTO:

$$K_D = aK = 0,1115$$

$$K_P = K(1-a) = 0,8885$$

$$Gc(z) = K_P + K_D(1 - z^{-1})$$

$$Gc(z) = 0,1115 + 0,8885(1 - z^{-1})$$

EJERCICIO:

MISMO SISTEMA ANTERIOR PERO

$$Gp(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \; ; \; T = 0,2\,s$$

PARÁMETROS DESEADOS:

$$t_s = 2 \quad y \quad \xi = 0,75$$

USAR UN PID: $Gc(z) = \dfrac{K(z-a)^2}{z(z-1)}$

SOLUCIÓN:

$$F(z) = \frac{0,01645(z+0,8206)K(z-a)^2}{z(z-0,8187)(z-0,6703)(z-1)}$$

$$a = 0,6880$$

$$K = 1,22$$

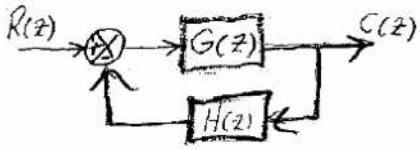
$$K_P = 0,4294K$$

$$K_I = 0,4733K$$

$$K_D = 0,0973K$$

NOTAS DEL PROF. ANDER MIRANDA

DISEÑO BASADO EN EL METODO DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES (L.G.R)



- EL METODO SE EXTIENDE A SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO DEBIDO A QUE LA ECUACIÓN CARACTERISTICA DEL SISTEMA EN TIEMPO DISCRETO TIENE LA MISMA FORMA QUE LA DEL SISTEMA EN TIEMPO CONTINUO.
- LA DIFERENCIA ESTÁ EN QUE EL LIMITE DE ESTABILIDAD QUEDA MODIFICADO DEL EJE $j\omega$ EN EL PLANO S AL CIRCULO UNITARIO EN EL PLANO z.

LA ECUACION CARACTERISTICA PUEDE TENER CUALQUIERA DE LAS FORMAS:

$1+G(z)H(z)=0$; $1+GH(z)=0$

HACIENDO $F(z)=G(z)H(z)$ ó $F(z)=GH(z)$

$1+F(z)=0 \Rightarrow F(z)=-1$

DADO QUE $F(z)$ ES UNA CANTIDAD COMPLEJA

- CONDICIÓN DE ANGULO:

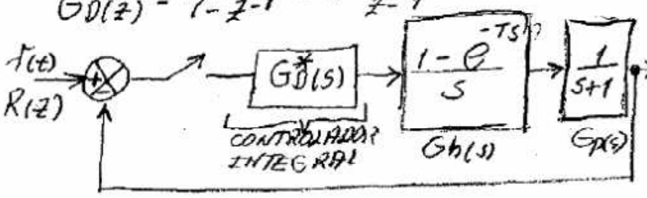
$\angle F(z) = \pm 180(2K+1)$; $K=0,1,2,\ldots$

- CONDICIÓN DE MAGNITUD:

$|F(z)|=1$

EJEMPLO: APLICANDO LGR DETERMINE LA ESTABILIDAD DEL SIG. SISTEMA DE CONTROL DIGITAL; PARA $T=0,5$ seg

$G_D(z)=\dfrac{K}{1-z^{-1}}=K\dfrac{z}{z-1}$



OBTENCIÓN DE LA ECUACION CARACTERISTICA:

$$\mathcal{Z}\{Gh(s)Gp(s)\}=\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{s+1}\right\}=$$

$$=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$G(z)=G_D(z)\mathcal{Z}\{Gh(s)\cdot Gp(s)\}=\frac{Kz}{z-1}\cdot\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

LA ECUACIÓN CARACTERISTICA EN ESTE CASO ES: $1+G(z)=0 \Rightarrow$

$$1+\frac{K\cdot z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}=0$$

PARA $T=0,5 \Rightarrow$

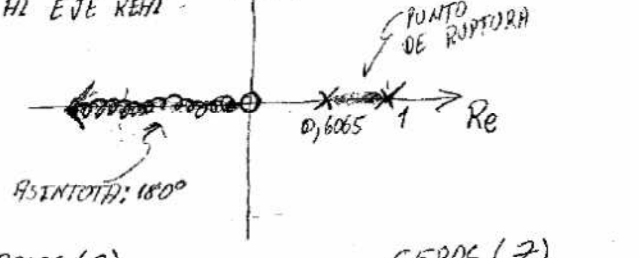
$$F(z)=\frac{0,393K\cdot z}{(z-1)(z-0,6065)}$$

1) # ASINT = #P − #Z = 2 − 1 = 1

2) ANG ASINT: $\gamma=\dfrac{\pm 180(2K+1)}{\#\text{ ASINT}}=\dfrac{180}{1}=180°$ ($K=0$)

3) LGR QUE ∈ AL EJE REAL

Σ SING IMPAR ⇒ ∃ LGR



POLOS (P)

$P_1=+1$; $P_2=0,6065$

CEROS (Z)

$Z_1=0$

4) CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE RUPTURA:

$1+KF(s)=0 \Rightarrow K=-\frac{1}{F(s)} = -\frac{(z-1)(z-0,6065)}{0,3935z}$

$\frac{dK}{dz} = -\frac{(z^2-0,6065)}{0,3935z} = 0 \Rightarrow z^2=0,6065$

$\Rightarrow z_1=0,7788$ y $z_2=-0,7788$

LOS DOS PUNTOS SON PUNTOS DE RUPTURA.

5) INTERSECCIÓN CON EL EJE IMAGINARIO

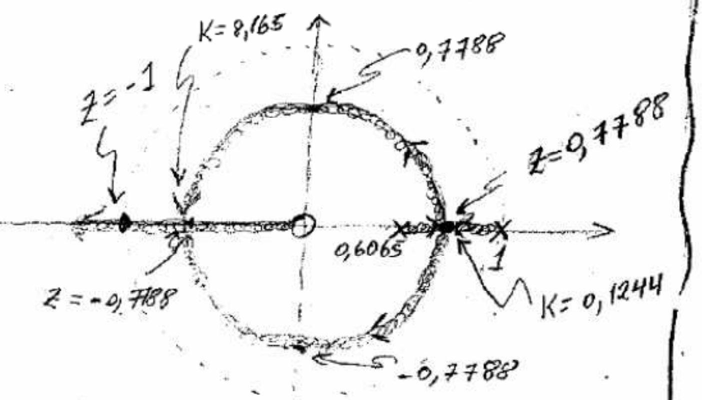
$1+F(z)=0$; $z=j\omega$

$1+\frac{0,3935Kz}{(z-1)(z-0,6065)}=0 \Rightarrow z^2+(0,3935K-1,6065)z+0,6065$

SUST. $z=j\omega \Rightarrow -\omega^2+(0,3935K-1,6065)j\omega+0,6065=0$

$-\omega^2+0,6065=0 \Rightarrow \omega=\pm 0,7788$

$\omega(0,3935K-1,6065)=0 \Rightarrow K=4,0825$



EL LGR RESULTÓ SER UN CÍRCULO DE RADIO IGUAL A 0,7788, CON UNA RECTA A 180°.

DEL LGR SE OBSERVA QUE EL VALOR CRÍTICO DE K SE OBTIENE CUANDO $z=-1 \Rightarrow$ LA CUAL SE OBTENER DE LA CONDICIÓN DE MAGNITUD O DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA:

SUSTITUYENDO $z=-1$ EN LA E.C.

$(-1)^2+(0,3935K-1,6065)(-1)+0,6065=0$

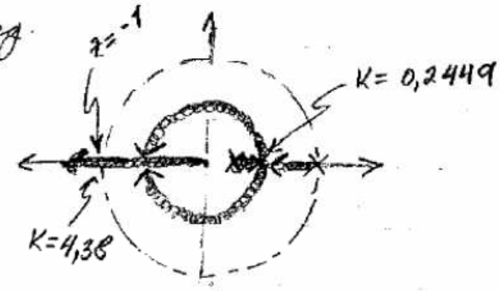
$1,6065+1,6065-0,3935K \Rightarrow K=8,165$

POR LO TANTO EL SISTEMA ES:

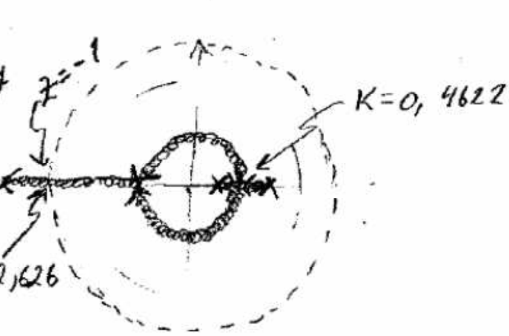
$\forall K<8,165$ ES ESTABLE

(*) A CONTINUACIÓN SE MUESTRA EL LGR DEL MISMO SISTEMA PERO CON TIEMPO DE MUESTREO DISTINTOS:

T= 1 seg.



T= 2 seg



OBSERVE QUE A MEDIDA QUE T AUMENTA EL SISTEMA SE HACE MENOS ESTABLE, POR LO TANTO EL COMPORTAMIENTO DE UN SIST DEPENDE DEL TIEMPO DE MUESTREO TAMBIEN